Clase 6

Campo eléctrico

Distribuciones contínuas de carga

Elementos de superficie

Ejemplo 10: El campo eléctrico del plano cargado con densidad de carga σ homogénea

Supongamos que el plano cargado coincide con el plano xy. Por simetría el campo apunta en la dirección z. Haciendo el limite de $R \to \infty$ en el ejemplo anterior, el disco de radio infinito tiende al plano y obtenemos el campo del plano cargado. Este resulta ser constante con el valor:

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}} \quad .$$

Elementos de volumen

Un volúmen requiere de tres parámetros τ,ν y μ para ser descrito. Los puntos que pertenecen al volumen que nos interesa quedan identificados por una expresión vectorial $\vec{\mathbf{r}}'(\tau, \nu, \mu)$ con τ,ν yμ recorriendo sendos intervalos. El elemento de volúmen es un paralelepípedo infinitesimal definido por los vectores infinitesimales $\vec{\mathbf{dl}}_\tau$, $\vec{\mathbf{dl}}_\nu$ y $\vec{\mathbf{dl}}_\mu$ definidos por $\vec{\mathbf{r}}'(\tau, \nu, \mu)$. En este caso tenemos $\vec{\mathbf{dl}}_\tau = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}'}{\partial \tau} d\tau$ que es tangente a la curva $\nu = constante$, $\mu = constante$ que pasa por el punto, $\vec{\mathbf{dl}}_\nu = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}'}{\partial \nu} d\nu$ que es tangente a la correspondiente curva $\tau = constante$, $\mu = constante$ y $\vec{\mathbf{dl}}_\mu = \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}'}{\partial \mu} d\mu$ tangente a la curva $\tau = constante$, $\nu = constante$. Geometricamente nos damos cuenta que el elemento de volúmen es el producto triple de estos tres vectores,

$$dV' = (\vec{\mathbf{dl}}_\tau \times \vec{\mathbf{dl}}_\nu).\vec{\mathbf{dl}}_\mu = \left(\frac{\partial \vec{\mathbf{r}}'}{\partial \tau} \times \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}'}{\partial \nu} \right) . \frac{\partial \vec{\mathbf{r}}'}{\partial \mu} d\tau d\nu d\mu$$

Ejemplo 11: El cilindro y coordenadas cilíndricas

Integrales en regiones cilíndricas se realizan mas cómodamente en coordenadas cilíndricas. En estas coordenadas un punto se especifica por el módulo de la proyección de su vector posición al plano xy, que llamaremos r_ρ, el ángulo φ que dicha proyección forma con el eje x y s coordenada z. Entonces tenemos,

$$r_\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \quad \varphi = arctan(\frac{y}{x}) \ , \quad z = z \ .$$

o equivalentemente

$$x = r_\rho cos(\varphi) \ , \quad y = r_\rho sen(\varphi) \ , \quad z = z \ .$$

A partir de $\vec{\mathbf{r'}} = r_\rho cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + r_\rho sen(\varphi)\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ calculamos,

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{dl}}_\rho &= \frac{\partial \vec{\mathbf{r'}}}{\partial r_\rho} dr_\rho = \Big(cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + sen(\varphi)\hat{\mathbf{y}} \Big) dr_\rho \\
\vec{\mathbf{dl}}_\varphi &= \frac{\partial \vec{\mathbf{r'}}}{\partial \varphi} d\varphi = \Big(- r_\rho sen(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + r_\rho cos(\varphi)\hat{\mathbf{y}} \Big) d\varphi \\
\vec{\mathbf{dl}}_\mathbf{z} &= \frac{\partial \vec{\mathbf{r'}}}{\partial z} dz = \hat{\mathbf{z}} dz
\end{aligned}$$

El elemento de volumen vale

$$d\vec{\mathbf{S}} = \begin{vmatrix} cos(\varphi) & sen(\varphi) & 0 \\ -r_\rho sen(\varphi) & r_\rho cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dr_\rho d\varphi dz = r_\rho dr_\rho d\varphi dz$$

Calculamos el volumen del cilindro de radio R y altura h,

$$V = \int dV = \int_0^R \int_0^h \int_0^{2\pi} r_\rho dr_\rho dz d\varphi = h\pi R^2$$

Líneas de Campo Eléctrico

Para visualizar el campo eléctrico podemos utilizar las líneas de campo eléctrico. Esta se definen como las líneas que en cada punto son tangentes al campo eléctrico. Como en cada punto el campo eléctrico tiene un único valor, por cada punto pasa una y solo una línea de campo. Las líneas de campo se orientan en la misma dirección del campo eléctrico. Salen por lo tanto de las cargas positivas y llegan a las cargas negativas. Las líneas de campo se dibujan mas cercanas unas a las otras en las regiones en que el campo es mas intenso y mas espaciadas donde el campo es mas débil. Las líneas de campo pueden cambiar de sentido en los puntos en los cuales el campo eléctrico se anula.

Las líneas de campo no deben confundirse con la trayectorias de las partículas cargadas bajo la acción del campo eléctrico. En cada punto la aceleración de una partícula cargada será proporcional al campo eléctrico (si no hay otras fuerzas) pero la velocidad dependerá de las condiciones iniciales. La trayectoria por lo tanto podrá ser incluso perpendicular a las líneas de campo. Cuando las líneas de campo son rectas y las partículas parten del reposo entonces la aceleración y la velocidad de la partícula tienen la misma dirección y la trayectoria también sera una línea recta que coincidirá con la línea de campo.

Veamos un par de ejemplos. Las líneas del campo eléctrico producido por una carga puntual positiva son líneas rectas que parten de la carga y van para el infinito. Si la carga es negativa las líneas de campo son igualmente rectas pero ahora vienen del infinito y terminan en la carga. Vemos en éste ejemplo que la convención de dibujar las líneas mas juntas donde el campo es mas intenso se verifica naturalmente.

Las líneas de campo de una línea infinita de carga con carga homogénea positiva son rectas perpendiculares a la línea de carga que salen de ésta y van para el infinito.